Aufgabe:
Der Duisburger Student Carlo S. hat beschlossen, nun noch intensiver für seine Statistik-Klausur zu lernen und möchte sich dazu Lehrbücher aus der Uni-Bibliothek ausleihen. Er geht davon aus, dass sich jedes der willkürlich aus dem Regal herausgegriffenen Lehrbücher mit der Wahrscheinlichkeit 0,6 als für seine Zwecke geeignet erweisen wird.
a) Carlo beschließt, fünf Bücher auszuleihen. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass sich mindestens drei dieser Bücher als geeignet erweisen?
b) Wie viele Bücher muss Carlo mindestens ausleihen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wenigstens drei ausgeliehene Bücher sich als geeignet erweisen, mindestens 0,9 beträgt?

Lösung:
a) Es handelt sich hier um eine Binomialverteilung B(5; 0,6), denn bei jedem Zug aus dem Regal gibt es genau zwei mögliche Ereignisse: das Buch ist geeignet oder es ist ungeeignet. Die einzelnen Züge sind unabhängig voneinander, was dadurch ausgedrückt wird, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit, nämlich dass das Buch geeignet ist, immer dieselbe ist, p = 0,6. Das heißt insbesondere, dass das Buch jeweils zurückgelegt wird, was streng genommen unsinnig ist, aber oftmals behilft man sich mit dieser gedanklichen Konstruktion.
Also erhält man mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung, wobei X die Anzahl der Bücher angibt, die sich als geeignet erweisen:

$$
\begin{aligned}
&P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) \\
&= 1 - (\binom{5}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot (1 - 0{,}6)^{5-0} + \binom{5}{1} \cdot 0{,}6^1 \cdot (1 - 0{,}6)^{5-1} + \binom{5}{2} \cdot 0{,}6^2 \cdot (1 - 0{,}6)^{5-2}) \\
&= 1 - (1 \cdot 1 \cdot 0{,}4^5 + 5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^4 + 10 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^3) \\
&= 1 - (0{,}01024 + 0{,}0768 + 0{,}2304) \\
&= 0{,}68256.
\end{aligned}
$$

b) Hier ist nun der Stichprobenumfang unbekannt, d.h. das n ist gesucht. X ist nun B(n; 0,6) verteilt, man rechnet die Sache ganz einfach brutal herunter:

$$
\begin{aligned}
&P(X \geq 3) \geq 0{,}9 \\
&\Leftrightarrow 1 - P(X < 3) \geq 0{,}9 \\
&\Leftrightarrow 1 - P(X \leq 2) \geq 0{,}9 \\
&\Leftrightarrow -P(X \leq 2) \geq -0{,}1 \\
&\Leftrightarrow P(X \leq 2) \leq 0{,}1 \\
&\Leftrightarrow P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \leq 0{,}1 \\
&\Leftrightarrow \binom{n}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot (1 - 0{,}6)^{n-0} + \binom{n}{1} \cdot 0{,}6^1 \cdot (1 - 0{,}6)^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot 0{,}6^2 \cdot (1 - 0{,}6)^{n-2} \leq 0{,}1 \\
&\Leftrightarrow 0{,}4^n + n \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}4^{n-2} \leq 0{,}1
\end{aligned}
$$

Für die letzte Ungleichung sind nun verschiedene Werte für n auszuprobieren:

Werte für n	**Ergebnis der linken Seite**	**kleiner oder gleich 0,1 ?**
n=2	1	nein
n=3	0,784	nein
n=4	0,5248	nein
n=5	0,31744	nein
n=6	0,1792	nein
n=7	0,096256	ja

Man sieht, dass die Ungleichung also ab 7 erfüllt ist, d.h. Paul muss mindestens sieben Bücher ausleihen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wenigstens drei ausgeliehene Bücher sich als geeignet erweisen, mindestens 0,9 beträgt.