Aufgabe 17:
Das folgende Schema wird uns bei der Lösung der Aufgaben sehr helfen. Man gehe die einzelnen Schritte des Kochrezepts ausführlich durch, bevor man mit der Lösung der Aufgaben beginnt.

LAMBERT – KOCHREZEPT POLYNOMDIVISION:

Diese wird anhand der Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ erklärt.

1. Schritt: Die Ausgangsfunktion wird gleich null gesetzt, d.h.
   $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.
2. Schritt: Nun muss eine Zahl x_1 gesucht werden, welche die Gleichung erfüllt.
   LAMBERT - TIPP: Hat die Gleichung obige Form, so muss die Zahl x_1 ein Teiler vom letzten Glied sein (Hier ist das die Zahl 6).
   Durch Probieren erhält man $x_1 = -2$, denn $f(-2) = 0$.
3. Schritt: Dann wird f(x) durch (x + 2) dividiert. Vorsicht: Auf das umgekehrte Vorzeichen achten (hier: + 2).
   Also $f(x) : (x + 2) = (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x + 2)$. Nun wird die höchste Potenz von f(x) (= x^3) durch die höchste Potenz des Nenners (= x) geteilt. Das Teilergebnis (= x^2) ist ein erstes Ergebnis, welches als solches notiert wird. Jetzt erweitert man den Nenner (= x + 2) mit x^2. Das erhaltene Ergebnis wird von f(x) abgezogen. Dann wiederholt man die obigen Schritte mit dem Ergebnis der Subtraktion. Wenn sich der Rest Null ergibt ist man am Ziel angelangt. Es kann nicht weiter zerlegt werden, wenn sich ein Rest ungleich null ergibt. Insgesamt ist dann:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x + 2) = x^2 - 4x + 3 \\
\underline{-(x^3 + 2x^2)} \\
\quad -4x^2 - 5x \\
\quad \underline{-(-4x^2 - 8x)} \\
\qquad\quad 3x + 6 \\
\qquad\quad \underline{-(3x + 6)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Nun nimmt f folgende Form an: $f(x) = (x^2 - 4x + 3) \cdot (x + 2)$.

a) Die Polynomdivision ist.
$(x^3 - 4x^2 - 11x + 30) : (x - 2)$. Wir beginnen mit der Rechnung.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 4x^2 - 11x + 30) : (x - 2) = x^2 - 2x - 15 \\
\underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
\quad -2x^2 - 11x \\
\quad \underline{-(-2x^2 + 4x)} \\
\qquad\quad -15x + 30 \\
\qquad\quad \underline{-(-15x + 30)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Die Ausgangsfunktion nimmt damit also folgende nützliche Form an
$f(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = (x^2 - 2x - 15) \cdot (x - 2)$.

b) Es ist folgendermaßen anzusetzen.

$$\begin{array}{l}
(2x^4 - 8x^3 - 26x^2 + 8x + 24) \; : (x + 2) = 2x^3 - 12x^2 - 2x + 12 \\
\underline{- (2x^4 + 4x^3)} \\
\quad - 12x^3 \\
\quad \underline{- (- 12x^3 - 24x^2)} \\
\qquad 24x^2 - 26x^2 = - 2x^2 \\
\qquad \underline{\qquad - (- 2x^2 - 4x)} \\
\qquad\qquad 4x + 8x = 12x + 8 \\
\qquad\qquad\quad \underline{- (12x + 24)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Damit ist $f(x) = (2x^3 - 12x^2 - 2x + 12) \cdot (x + 2)$.

c) Um leichter rechnen zu können, sollten die Bruchzahlen in Dezimalzahlen umgewandelt werden. Dann erhält man folgenden Ansatz

$$\begin{array}{l}
(0{,}25x^4 - 0{,}75x^2 - x - 10{,}5) \; : (x - 3) = 0{,}25x^3 + 0{,}75x^2 + 1{,}5x + 3{,}5 \\
\underline{- (0{,}25x^4 - 0{,}75x^3)} \\
\quad 0{,}75x^3 - 0{,}75x^2 \\
\quad \underline{- (0{,}75x^3 - 2{,}25x^2)} \\
\qquad 1.5x^2 - x \\
\qquad \underline{- (1{,}5x^2 - 4{,}5x)} \\
\qquad\quad 3{,}5x - 10{,}5 \\
\qquad\quad \underline{-(3{,}5x - 10{,}5)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Die Funktion f(x) lautet dann $f(x) = (0{,}25x^3 + 0{,}75x^2 + 1{,}5x + 3{,}5) \cdot (x - 3)$.