

1.1 Permutationen

1.1.1 Permutationen ohne Wiederholung

Permutieren heißt vertauschen. Man stellt sich hier die Frage, auf wieviele verschiedene Arten und Weisen n Objekte angeordnet werden können.

Antwort: auf $n!$ (sprich: „ n Fakultät“) verschiedene Arten, dabei ist

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Also z.B.

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

$$3! = 6$$

$$4! = 24$$

$$5! = 120$$

$$6! = 720$$

$$7! = 5.040$$

$$8! = 40.320$$

$$9! = 362.880$$

$$10! = 3.628.800$$

Tab. 1.1: Die Zahl $n!$

Außerdem ist $0! = 1$ definiert.

Genauer: die Anzahl aller n -stelligen Permutationen ohne Wiederholung beträgt $n!$.

Beispiel 1.1:

Die Anzahl der verschiedenen Sitzanordnungen von $n = 3$ Personen auf 3 Stühlen beträgt $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Benennt man die Personen mit A, B und C, so lassen sich nämlich die Anordnungen (A,B,C), (A,C,B), (B,A,C), (C,A,B), (C,B,A) und (B,C,A) unterscheiden.

Man beachte, dass das A wandert: zuerst steht A vorne und B und C werden vertauscht (= permutiert). Danach steht A in der Mitte und B und C werden wieder vertauscht (was jeweils zwei Möglichkeiten liefert). Schließlich ist A ganz hinten und liefert über die Permutation von B und C wieder zwei Möglichkeiten. Man sollte sich eine systematische Anordnung angewöhnen, damit man nicht durcheinanderkommt.

1.1.2 Permutationen mit Wiederholung

Permutationen mit Wiederholung

Wenn unter den Elementen eines n -Tupels k Elemente voneinander verschieden sind ($k \leq n$) und jeweils mit den Häufigkeiten n_1, n_2, \dots, n_k auftreten und $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ gilt, dann nennt man dies eine n -stellige Permutation mit n_1, n_2, \dots, n_k Wiederholungen.

Es gibt insgesamt $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$ dieser n -stelligen Permutationen.

Beispiel 1.2:

Aus den Buchstaben A, A, B, C lassen sich $\frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = 12$ verschiedene Permutationen mit Wiederholung, d.h zwölf unterschiedliche 4-Tupel der betrachteten Art bilden.

Es gibt $n_1 = 2$ mal den Buchstaben A, $n_2 = 1$ mal den Buchstaben B sowie $n_3 = 1$ mal das C. Dies macht insgesamt $n = n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 1 + 1 = 4$ Buchstaben, die alle in einem 4-Tupel hingelegt werden sollen. Man erhält

(A,A,B,C)	(A,B,C,A)
(A,A,C,B)	(A,C,B,A)
(B,A,A,C)	(A,B,A,C)
(C,A,A,B)	(A,C,A,B)
(B,C,A,A)	(B,A,C,A)
(C,B,A,A)	(C,A,B,A)

Die beiden Buchstaben A sind also insbesondere nicht unterscheidbar, d.h. wenn man die beiden A noch beschriften würde mit einem kleinen Index 1 und 2, so wäre (A_1, A_2, B, C) und (A_2, A_1, B, C) dasselbe Ereignis und wird deswegen nur kurz (A, A, B, C) geschrieben.

Beispiel 1.3:

Aus den Zahlen 2,2,2,3,3,5,7,9,9 lassen sich $\frac{9!}{3!2!1!1!2!} = \frac{9!}{6 \cdot 2 \cdot 2} = 15.120$ verschiedene neunstellige Zahlen bilden.

Es kommt auch hier beispielsweise nicht auf die Reihenfolge der Zweien und der Dreien an, denn egal an welcher Stelle die einzelnen (künstlich unterscheidbaren) Ziffern stehen, die Zahl ist die gleiche. So ist z.B. (mit nummerierten Dreien) die Zahl $223_1 23_2 5997$ die gleiche Zahl wie $223_2 23_1 5997$, nämlich beide Mal einfach 223235997.

Wir haben mit (A, B, C) ein sogenanntes „Tupel“ (hier ein Dreier-Tupel) eingeführt. An der ersten Stelle steht ein A, an der zweiten passiert B, an der dritten C. Ein Tupel gibt also mögliche Anordnungen wider. Wir werden im Folgenden immer wieder auf Tupel zurückgreifen.

MERKE:

Wir werden die Formel $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$ an späterer Stelle, nämlich bei der Multinomialverteilung (= Polynomialverteilung) nochmals kennenlernen.

Bei beiden Arten von Permutationen haben wir alle vorhandenen n Objekte angeordnet. Wenn man dies allerdings nur für einige der Elemente tut, kommt man zum Begriff der *Variation*.

1.2.2 Variationen mit Wiederholung

Variationen mit Wiederholung

Ein k -Tupel (a_1, a_2, \dots, a_k) aus k Elementen einer n -elementigen Obermenge heißt Variation k . Ordnung von n Elementen ohne Wiederholung. Es gibt n^k viele Möglichkeiten hierfür.

MERKE:

- Die einzelnen Elemente a_i, a_j müssen also nicht ungleich sein, die Bedingung $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$ fehlt im Gegensatz zu den Variationen ohne Wiederholung.
- Die Reihenfolge der Elemente in den k -Tupeln wird unterschieden

Beispiel 1.5:

Beim dreifachen Münzwurf gibt es ($n = 3$ faches Werfen einer Münze mit $k = 2$ Ausprägungen, nämlich Kopf und Zahl) insgesamt $n^k = 2^3 = 8$ unterschiedliche Möglichkeiten.

Diese lauten $(K,K,K), (K,Z,Z), (Z,K,Z), (Z,Z,K), (K,K,Z), (K,Z,K), (Z,K,K), (Z,Z,Z)$.

Bei den nun folgenden Kombinationen kommt es auf die Elemente selber an, *nicht* hingegen auf ihre *Reihenfolge*.

1.3 Kombinationen

1.3.1 Kombinationen ohne Wiederholung

Kombinationen ohne Wiederholung

So ist es z.B. beim Kartenspiel gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Karten ausgegeben werden, die der Spieler hinterher in der Hand hält – es kommt lediglich auf die Karten selbst an. So ist (Pik 10, Herzbube, Karo Ass) in der Hand eines Kartenspielers das gleiche